Oversigt

over det

Kongelige danske Videnskabernes Selskabs

Forhandlinger

og

dets Medlemmers Arbeider

i Aaret 1843.

Af

Conferentsraad og Professor **H. C. Örsted,**
Commandeur af Dannebrogen og Dannebrogsmand, Selskabets Secretair.

Nr. 6.

I Mödet den 19de Mai forelagde Professor *Jürgensen* Selskabet en kort Deduction af den Formel, der tjener til at bestemme Jordklodens Figur ved Iagttagelser over Pendulets Svingninger. Denne Meddelelse, som ved en Feiltagelse ikke er bleven indrykket i Nr. 5, er af fölgende Indhold.

Det er bekjendt, at den Lov, hvorefter Tyngden, eller, om man vil, Secundpendulets Længde, varierer paa forskjellige Steder af Jordkloden, udtrykkes ved fölgende Ligning:

$$G_\varphi = G_0 \left\{1 + (\tfrac{5}{2}u - \alpha)\sin^2\varphi\right\},$$

hvor G er Tyngden, φ Stedets geocentriske Bredde — eller ogsaa, naar man bortkaster meget smaa Störrelser af anden Orden, den astronomiske —, u Forholdet mellem Centrifugalkraften under Æqvator og Tyngden, og α Applatissementet. Den mathematiske Deduction af denne Ligning er, saaledes som den findes hos *Laplace* i mécanique céleste, og derefter er optagen i *Pontécoulant* théor. anal. &c., meget sammensat, hvorfor ogsaa de mechaniske Læreböger, som *Poissons* o. a., desangaaende henvise til mécanique céleste. De fölgende Bemærkninger have til Hensigt, at gjöre denne Deduction simplere uden at opgive dens Almindelighed.

Attractionen af en hvilkensomhelst Sphæroide paa et materielt Punkt bestemmes, som bekjendt, ved at beregne fölgende bestemte Integral

$$V = \int\int\int \frac{\varrho s^2 ds \cos\theta d\theta d\lambda}{\sqrt{s^2 - 2rs\cos\delta + r^2}},$$

hvor $\cos\delta = \sin\varphi \sin\theta + \cos\varphi \cos\theta \cos(\lambda - \psi)$, og hvor r, φ, ψ ere Polarcoordinater (Rad. vect., Bredde, Længde) for det attraherede Punkt, s, θ, λ for et Punkt i Sphæroiden, ϱ Tætheden i dette Punkt og Integrationsgrændserne $s = 0$, $s =$ Radius vector for Sphæroiden, $\theta = -\frac{1}{2}\pi$, $\theta = +\frac{1}{2}\pi$, $\lambda = 0$, $\lambda = 2\pi$. Efter disse Integrationer bestemmes Attractionen i Retningen af r ved at differentiere V med Hensyn til denne Störrelse.

For en eensartet Kugle, hvis Radius $= a$ giver Integrationen

$$V = 2\pi\varrho a^2 - \frac{2}{3}\pi\varrho r^2 \text{ naar } r < a,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\varrho\frac{a^3}{r} \text{ naar } r > a.$$

For en fra en Kugle lidet afvigende Sphæroide, hvis Radius vector for Overfladen er $= a\{1 + \alpha F(\sin\theta, \sin\lambda)\}$, hvor α er en meget lille Störrelse, forandres V til

$$V + \left(\frac{dV}{ds}\right) a\alpha F(\sin\theta, \sin\lambda), \text{ hvor } s = a;$$

altsaa bliver til Værdien af V for Kuglen at föie

$$v = \varrho a^3 \alpha \int\int \frac{F(\sin\theta, \sin\lambda)\cos\theta d\theta d\lambda}{\sqrt{a^2 - 2ar\cos\delta + r^2}}.$$

For at udvikle dette Integral ville vi benytte en Sætning af *Jacobi*, der findes i Crelles Journal 2det Bd. S. 223 f., og lyder saaledes:

Antages $(1 - 2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 y + X_2 y^2 + \&c.$

saa er $X_n = \dfrac{d^n (x^2 - 1)^n}{2^n.1.2.3\ldots n dx^n}$,

hvoraf $\displaystyle\int_{-1}^{+1} Fx X_n dx = (-1)^n \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n Fx}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx,$

idet F er en hvilkensomhelst Function. Af denne Ligning udledes, at mellem Grændserne -1 og $+1$ er

$$\int X_m X^n dx = 0 \text{ naar } n \gtrless m,$$

$$\text{og} \int X_n X_n dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Er altsaa X en Function af x, og sættes

$$X = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots.$$

$$\text{saa er } A_n = \frac{2n+1}{2} \int X X_n dx.$$

Og da $x=1$ giver $X_1 = X_2 = \ldots = 1$, er Værdien af X for $x=1$

$$= A_0 + A_1 + A_2 + \&c.$$

Transformerer man nu Polarcoordinaterne θ og λ i Udtrykket for v til andre lignende θ' og λ', regnede fra et Plan lodret paa Radius til det attraherede Punkt, saa bliver $\cos\delta = \sin\theta'$, Elementet $\cos\theta\, d\theta\, d\lambda = \cos\theta' d\theta' d\lambda'$, og endelig $F(\sin\theta, \sin\lambda)$ en Function af θ' og λ', der har den Egenskab, at den, naar $\theta' = 90^0$, bliver uafhængig af λ' og $= F(\sin\varphi, \sin\psi)$. Betragtningen af den sphæriske Triangel, hvis Sider ere Complementerne til θ, θ' og φ, giver nemlig: $\sin\theta = \sin\theta' \sin\varphi + \cos\theta' \cos\varphi \cos\lambda'$, $\sin(\lambda - \psi) : \sin\lambda' = \cos\theta' : \cos\theta$, idet man regner λ' fra det Plan, der gaaer igjennem φ. Sætter man $\sin\theta' = x$ og betegner hiin Function ved $f(x, \lambda')$, saa kan man altsaa antage

$$f(x,\lambda') = X + P\sin\lambda' + Q\cos\lambda' + R\sin 2\lambda' + S\cos 2\lambda' + \&c.,$$

hvor X, P, Q o.s.v. ere Functioner af x af den Beskaffenhed, at $x=1$ giver $X = F(\sin\varphi, \sin\psi)$, $P=0$, $Q=0$ &c; og Udtrykket for v bliver da:

$$v = \varrho a^3 \alpha \iint \frac{f(x,\lambda')\, dx\, d\lambda'}{\sqrt{a^2 - 2arx + r^2}},$$

at integrere fra $\lambda' = 0$ til $\lambda' = 2\pi$ og fra $x = -1$ til $x = +1$.

Den förste af disse Integrationer giver

$$v = 2\pi\varrho a^3 \alpha \int \frac{X dx}{\sqrt{a^2 - 2arx + r^2}}.$$

Med Hensyn til den anden Integration antage man

$$X = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \&c.,$$

og da endvidere $(a^2 - 2arx + r^2)^{-\frac{1}{2}}$ kan udvikles i een af de to Former

$$\frac{1}{a}\left\{1+\frac{r}{a}X_1+\frac{r^2}{a^2}X_2+\&c.\right\},$$

$$\frac{1}{r}\left\{1+\frac{a}{r}X_1+\frac{a^2}{r^2}X_2+\&c.\right\},$$

eftersom $r<a$ eller $r>a$, saa finder man, ifölge den oven anförte Sætning,

$$v=4\pi\varrho a^2\alpha\left\{A_0+\frac{r}{3a}A_1+\frac{r^2}{5a^2}A_2+\&c.\right\}\text{ naar } r<a,$$

$$v=4\pi\varrho\frac{a^3}{r}\alpha\left\{A_0+\frac{a}{3r}A_1+\frac{a^2}{5r^2}A_2+\&c.\right\}\text{ naar } r>a.$$

Sammenligner man een af disse Udviklinger, t. Ex. den förstet med den tilsvarende Udvikling af det oprindelige Udtryk for v, idet man sætter

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{a^2-2ar\cos\delta+r^2}}=\frac{1}{a}\left\{P_0+P_1\frac{r}{a}+P_2\frac{r^2}{a^2}+\&c.\right\},$$

saa finder man for et hvilketsomhelst n

$$A_n=\frac{2n+1}{4\pi}\iint F(\sin\theta,\sin\lambda)P_n d\theta d\lambda;$$

men $F(\sin\varphi,\sin\psi)$ er Værdien af X for $x=1$, d. e.

$$F(\sin\varphi,\sin\psi)=A_0+A_1+A_2+\ldots$$

Heraf fölger, at en given Function af φ og ψ kun kan tilstæde een Udvikling af denne Form, hvilken erholdes ved at forandre φ og ψ til θ og λ og derpaa anvende de foregaaende Sætninger. Er altsaa den givne Function af Formen CA_n, saa kommer den ved Udviklingen tilbage i samme Form*). Fölgelig kunne to Rækker af Formen

$$C_0A_2+C_1A_1+C_2A_2+\&c.$$

ikke være identiske uden at de til samme Index svarende Led ere identiske.

Naar man til de fundne Udtryk for for v föier de tilsvarende Udtryk V for Kuglen, saa har man to Værdier af V for en eensartet fra Kuglen lidet afvigende Sphæroide, af hvilke den förste finder Sted naar det attraherede Punkt ligger inden i Sphæroiden, den anden naar

*) Det er denne mærkværdige Sætning, *Laplace* ved sine Undersögelser har lagt til Grund; den er paa en, som det synes, mindre direct Maade beviis i méc. cél. Liv. 3 ch. 2 Nr. 10—11; see ogsaa *Pontécoulant* theorie &c. Vol. 2 p. 380, samt *Legendre* ex. de calc. int. 5me partie § XI.

det ligger udenfor samme. Differentierer man disse to Udtryk med Hensyn til a, saa finder man Værdierne af V for et sphæroidisk Lag. Integreres endelig disse Differentialer saaledes, at ϱ og α tillige variere, og imellem de ved det attraherede Punkts Beliggenhed bestemte Grændser, saa finder man V for en Sphæroide, bestaaende af eensartede Lag af forskjellig Tæthed og Afvigelse fra Kugleformen.

For et attraheret Punkt, beliggende enten inden i Sphæroiden, eller paa dens Overflade, erholdes saaledes fölgende Udtryk:

$$V = 4\pi\left\{\int \varrho a da + 2\int \alpha \varrho a da\, A_0 + \tfrac{1}{3}\int \alpha \varrho da\, r A_1 + - \&c.\right\}$$
$$+ 4\pi\left\{\frac{\int \varrho a^2 da}{r} + \frac{3\int \alpha\varrho a^2 da}{r} A_0 + \frac{4\int \alpha\varrho a^3 da}{3r^2} A_1 + \frac{5\int \alpha\varrho a^4 da}{5r^3} A_2 + \&c.\right\},$$

hvor Integralerne i den förste Deel gaae fra $a =$ Værdien af det Lag, hvori Punktet befinder sig, — hvilken vi ville betegne med a^*, — til $a = a$, og i den sidste Deel fra $a = 0$ til $a = a^*$. Er Punktet paa Overfladen, saa falder den förste Deel bort.

Betragter man Jordkloden som oprindelig flydende og sammensat af eensartede Lag, saa maa, efter Hydrostatikens Regler, Coordinaterne r, φ, ψ for ethvert Punkt af dens Masse, naar det under Omdreiningen skal være i Ligevægt, fyldestgjöre fölgende Ligning:

$$V + \tfrac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2\varphi = C,$$

hvor V betegner det oven anförte Integral, ω er Omdreinings-Vinkelhastigheden, og C en af Coordinaterne uafhængig Störrelse. Antager man Lagenes Form lidet afvigende fra Kugleformen og indsætter det ovenfor fundne Udtryk for V, saa kan man bestemme A_0, A_1, A_2 &c., og dermed Lagenes almindelige Ligning. Men iforveien maa man udvikle $\tfrac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2\varphi$, eller blot $\cos^2\varphi$, i en Række af ovenstaaende Form. Dette skeer, ifölge de foregaaende Sætninger, ved at sætte

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (x \sin\varphi + \sqrt{1 - x^2}\cos\varphi\cos\lambda')^2$$
$$= X + P\sin\lambda' + Q\cos\lambda' + \&c.,$$

$$\text{samt } X = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + \&c.$$

hvorved man finder

$$X = \frac{1}{2\pi}\int \cos^2\theta\, d\lambda', \text{ fra } \lambda' = 0 \text{ til } \lambda' = 2\pi;$$

$$B_n = \frac{2n+1}{2}\int X X_n dx, \text{ fra } x = -1 \text{ til } x = +1.$$

Man erholder saaledes $B_0=\frac{2}{3}$, $B_1=0$, $B_2=\frac{1}{3}-\sin\varphi$, B_3 o. s. v. $=0$, altsaa

$$\cos^2\varphi=\tfrac{2}{3}+(\tfrac{1}{3}-\sin^2\varphi).$$

Betegnes tillige ved u Forholdet mellem Centrifugalkraften $r\omega^2$ og Attractionen i Retningen r, saa er

$$r\omega^2=-\left(\frac{dV}{dr}\right)u=4\pi\frac{\int\varrho\, a^2\, da}{r^2}u,$$

naar smaa Störrelser af Ordenen αu bortkastes,

$$\text{altsaa } \tfrac{1}{2}r^2\omega^2=2\pi\frac{\int\varrho\, a^2 da}{r}u.$$

Indsætter man nu disse Værdier tilligemed Rækken for V i Ligevægtsligningen, sætter

$$r=a^*(1+\alpha^*[A_0+A_1+A_2+\&c.]),$$

udvikler og bortkaster Störrelser af anden Orden med Hensyn til α og u, saa giver Sammenligningen af de Led, der have samme Index, alle Coefficienterne A constante, undtagen A_2, til hvis Bestemmelse man finder fölgende Ligning:

$$-\frac{\alpha^*\int\varrho\, a^2\, da}{a^*}A_2+\frac{\int\alpha\varrho\, a^4\, da}{a^{*3}}A_2+\frac{u\int\varrho\, a^2\, da}{2a^*}B_2=C,$$

hvor Integralerne tages fra $a=0$ til $a=a^*$, og hvor C er en af φ uafhængig Störrelse. Men vi have tillige forudsat, at Coefficienterne A blot ere Functioner af φ og ψ, men ikke af a og de deraf afhængige Störrelser. Begge Betingelser i Forening give, ifölge Værdien af B_2,

$$A_2=h\sin^2\varphi+k,$$

hvor h og k ere uafhængige af φ og a, samt at Coefficienten til $\sin^2\varphi$ maa være Nul, d. e.

$$-\frac{\alpha^*\int\varrho\, a^2 da}{a^*}h+\frac{\int\alpha\varrho\, a^4\, da}{a^{*3}}h-\frac{u\int\varrho\, a^2\, da}{2a^*}=0.$$

Altsaa ere Lagene Omdreinings-Ellipsoider, og Relationen mellem Ellipticiteten $\alpha^* h$ og u bestemt ved den sidstanförte Ligning. Denne Ligning faaer en simplere Form naar man skriver a og α istedetfor a^* og α^* og altsaa tager Integralerne fra $a=0$ til $a=a$. Sætter man nemlig derefter $\alpha h a^2=\beta$, altsaa

$$\int\alpha h\varrho\, a^4\, da=\beta\int\varrho\, a^2\, da-\int d\beta\int\varrho\, a^2\, da,$$

og betegner $\int\varrho a^2 da$ ved p, saa bliver Ligningen

$$\int p\, d\beta+\tfrac{1}{2}u a^2 p=0.$$

Integralet er taget fra $a=0$ til $a=a$; differentieres altsaa med Hensyn til a, erholdes

$$p\,d\beta+\tfrac{1}{2}u\,d(a^2p)=0.$$

Denne Ligning bestemmer β og dermed αh naar p er bekjendt som Function af a, d. e. naar Loven for Tæthedens Variation er given. Den viser, at $d\beta$ maa være negativ, altsaa: 1) efterdi β begynder fra Nul, at β selv og dermed ogsaa αh maa være negativ, d. e. at Ellipsoiden er fladtrykt; 2) at β, eller $\alpha h a^2$, maa i Henseende til sin numeriske Værdi voxe fra Centrum mod Overfladen, d. e. at Applatissementet αh enten tiltager, eller i alt Fald aftager i et ringere Forhold end Qvadratet af a, der paa en meget lille Störrelse nær er = Lagets Halvaxe, tiltager (see Méc. cél. Liv. 3, chap. 4, Nr. 34 og Pontécoulant Vol. 2 pag. 425).

Er Legemets hele Masse forenet i Centret, saa er p uafhængig af a, altsaa

$$\beta=-\tfrac{1}{2}ua^2,\ \text{d. e.}\ \alpha h=-\tfrac{1}{2}u.$$

Dette vilde være det samme, som om Legemets materielle Punkter ikke vare underkastede hinandens indbyrdes Tiltrækning, men kun Centrets Tiltrækning i omvendt Forhold som Afstandenes Qvadrater. Lagenes almindelige Ligning findes da let umiddelbart efter Hydrostatikens Regler.

Er Legemet eensartet, altsaa ϱ constant, saa er $p=\frac{1}{3}\varrho a^3$, fölgelig

$$\beta=-\tfrac{5}{4}u\,a^2,\ \text{d. e.}\ \alpha h=-\tfrac{5}{4}u.$$

Er endelig Tætheden aftagende fra Centrum mod Overfladen, saa vil α have en mellem disse Grændser indbefattet Værdi, som iövrigt ikke nærmere kan bestemmes uden ved at kjende Loven for Tæthedens Forandring. Tiltagende fra Centrum mod Overfladen kan Tætheden intetsteds være, naar Ligevægten skal være stadig.

For nu at bestemme Tyngdens Forandring paa Jordens Overflade, differentierer man den sidste Deel af Udtrykket V med Hensyn til r, tager Differentialcoefficienten med modsat Tegn, idet man regner Tyngden positiv ned efter, subtraherer Centrifugalkraften og indsætter endelig for r dens Værdi svarende til Overfladen. Men istedetfor iforveien at anstille en nærmere Betragtning angaaende de hidtil ubestemte constante Coefficienter A_0, A_1^2, k, A_3 o. s. v., er det simplere at gaae frem paa fölgende Maade. Da man veed, at Overfladen er en fladtrykt Ellipsoide, saa antage man dens Ligning at være

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi),$$

hvor altsaa a er Æqvators Radius og α Applatissementet. Udvikler man nu Functionen $-\sin^2\varphi$ i en Række af Formen $A_0 + A_1 + A_2 +$ &c., saa finder man $A_0 = -\frac{1}{3}$, $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{3} - \sin^2\varphi$, $A_3 = A_4 = \ldots = 0$. Indsættes disse Værdier i den sidste Deel af V, erholdes for Overfladen

$$V = 4\pi \left\{ \frac{\int \varrho a^2\, da}{r} - \frac{\int \alpha \varrho a^2\, da}{r} + \frac{\int \alpha \varrho a^4\, da}{r^3} \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) \right\},$$

hvoraf, ved at differentiere med Hensyn til r,

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = 4\pi \left\{ \frac{\int \varrho a^2\, da}{r^2} - \frac{\int \alpha \varrho a^2\, da}{r^2} + \frac{3\int \alpha \varrho a^4\, da}{r^4} \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) \right\}.$$

Sætter man heri $r = a\,(1 - \alpha \sin^2\varphi)$, udvikler og bortkaster smaa Störrelser af anden og höiere Orden, saa har man fölgende Udtryk for Attractionen paa Overfladen:

$$4\pi \left\{ \frac{\int \varrho a^2 da}{a^2} (1 + 2\alpha \sin^2\varphi) - \frac{\int \alpha \varrho a^2 da}{a^2} + \frac{3\int \alpha \varrho a^4 da}{a^4} \left(\tfrac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) \right\}.$$

Men Applatissementet α afhænger, efter det Foregaaende, af u ved fölgende Ligning:

$$\frac{\alpha \int \varrho a^2\, da}{a} - \frac{\int \alpha \varrho a^4\, da}{a^3} - \frac{u \int \varrho a^2\, da}{2a} = 0.$$

Eliminerer man ved denne Ligning Integralet $\int \alpha \varrho a^4\, da$ og fradrager Centrifugalkraften $\frac{4\pi \int \varrho a^2\, da}{a^2} u \cos^2\varphi$, saa finder man den ved Centrifugalkraften formindskede Attraction, eller Tyngden paa Jordens Overflade under Bredden φ, at være

$$G_\varphi = 4\pi \left\{ P - \gamma + \left(\tfrac{5}{2} u - \alpha\right) P \sin^2\varphi \right\},$$

hvor $P = \frac{\int \varrho a^2\, da}{a^2}$ og hvor γ betegner en meget lille Störrelse af samme Orden som α og u. Sætter man $\varphi = 0$, erholdes

$$G_0 = 4\pi \left\{ P - \gamma \right\},$$

altsaa, naar meget smaa Störrelser af anden Orden bortkastes,

$$G_\varphi = G_0 \left\{ 1 + \left(\tfrac{5}{2} u - \alpha\right) \sin^2\varphi \right\},$$

hvilken Relation er uafhængig af enhver Forudsætning angaaende Tæthedens Forandring fra Centrum mod Overfladen.